Trace of a tensor

اثر یک تانسور، مجموع درایه‌های قطر اصلی آن است.

$$tr\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_ib_i=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$tr\left(\tilde{T}\right)=tr\left(T_{ij}\hat{e}_i\circ\hat{e}_j\right)=T_{ij}tr\left(\hat{e}_i\circ\hat{e}_j\right)=T_{ij}\left(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j\right)=\delta_{ij}T_{ij}=T_{ii}$$

$$tr\left(\tilde{T}\right)=T_{ii}\quad \& \quad tr\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$tr\left(\tilde{T}^T\right)=tr\left(\tilde{T}\right)=T_{ii}=T_{11}+T_{22}+T_{33}$$

T_{ii} کمّیت عددی است که مستقل از دستگاه مختصات می‌باشد و لذا یک پایای تانسور (tensor invariant) است.

Tensor inverse

در هر تانسوری، رابطه‌ی $\tilde{T}^{-1}\tilde{T}=\tilde{T}\tilde{T}^{-1}=\tilde{I}$ برقرار است.

$$\tilde{T}\vec{x}=\vec{b}$$

$$\tilde{T}^{-1}\tilde{T}\vec{x}=\tilde{T}^{-1}\vec{b}\ \rightarrow\ \tilde{I}\vec{x}=\tilde{T}^{-1}\vec{b}\ \Rightarrow\ \vec{x}=\tilde{T}^{-1}\vec{b}$$

$$\tilde{T}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\tilde{T}}{\det\tilde{T}}\ ,\ \det\tilde{T}\neq 0$$

$$\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)^{-1}=\tilde{B}^{-1}\tilde{A}^{-1}$$

$$\left(\tilde{A}^{-1}\right)^{-1}=\tilde{A}$$

$$\left(\tilde{A}^{T}\right)^{-1}=\left(\tilde{A}^{-1}\right)^{T}=\tilde{A}^{-T}\quad \textit{inverse transpose}$$

Tensor determinant

$$\det\tilde{A}=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}=A_{11}\begin{vmatrix}A_{22}&A_{23}\\A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}-A_{12}\begin{vmatrix}A_{21}&A_{23}\\A_{31}&A_{33}\end{vmatrix}+A_{13}\begin{vmatrix}A_{21}&A_{22}\\A_{31}&A_{32}\end{vmatrix}$$

$$=A_{11}\left(A_{22}A_{33}-A_{23}A_{32}\right)+A_{12}\left(A_{23}A_{31}-A_{21}A_{33}\right)+A_{13}\left(A_{21}A_{32}-A_{22}A_{31}\right)$$

$$\det\tilde{A}=\left|\tilde{A}\right|=\varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}=\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$$

مثال: وارون تانسور $\tilde{A}$ را به‌دست آورید.

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

حلّ:

$$\tilde{A}^T=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&1&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\quad \text{و} \quad \operatorname{adj}\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-5&1&3\\-3&0&3\end{bmatrix}$$

$$\det\tilde{A}=\left|\tilde{A}\right|=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=3=\left|\tilde{A}^T\right|$$

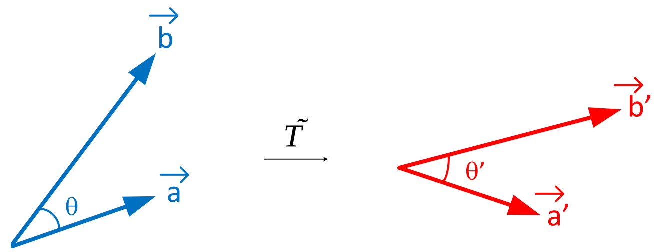
$$\tilde{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}\tilde{A}}{\left|\tilde{A}\right|}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&0\\-5&1&3\\-3&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3&1/3&0\\-5/3&1/3&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{-1}\neq\tilde{A}^T$$

Orthogonal tensor

تانسور متعامد، یک تبدیل خطّی است که طول‌ها و زاویه‌ی بین بردارهای تبدیل‌شده را حفظ می‌کند.

$$\begin{cases} \tilde{T}\vec{a} = \vec{a}' \\ \tilde{T}\vec{b} = \vec{b}' \end{cases}$$



$$|\vec{a}'| = |\vec{a}| \;\;\&\;\; |\vec{b}'| = |\vec{b}|$$
$$\sphericalangle(\vec{a}', \vec{b}') = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

① $\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (\tilde{T}\vec{a}) \cdot (\tilde{T}\vec{b}) = \vec{b} \cdot \tilde{T}^T (\tilde{T}\vec{a}) = \vec{b} \cdot (\tilde{T}^T \tilde{T})\vec{a}$

② $\vec{a}' \cdot \vec{b}' = |\vec{a}'||\vec{b}'|\cos\theta' = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \tilde{I}\,\vec{a}$

① & ② $\tilde{T}^T \tilde{T} = \tilde{I}$

orthogonality $\tilde{T}\tilde{T}^T = \tilde{I} = \tilde{T}^T\tilde{T} \;\;\Rightarrow\;\; T_{im}T_{jm} = \delta_{ij} = T_{mi}T_{mj}$

orthogonal tensor $\tilde{T}^T\tilde{T} = \tilde{I} \;\;\&\;\; \tilde{T}^{-1}\tilde{T} = \tilde{I} \;\;\Rightarrow\;\; \tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^T$ *orthogonality*

۱-۴: بردار دوگان Dual Vector

برای هر تانسور پادمتقارن، می‌توان یک بردار دوگان تعریف نمود. درایه‌های قطری تانسور پادمتقارن، صفر و درایه‌های غیرقطری، قرینه هستند.

$$\tilde{T}^A\vec{a} = \vec{t}^A \times \vec{a}$$
$$\tilde{T}^A a_i\hat{e}_i = \vec{t}^A \times a_i\hat{e}_i \;\rightarrow\; \tilde{T}^A\hat{e}_i = \vec{t}^A \times \hat{e}_i \;\rightarrow\; T^A_{ki}\hat{e}_k = \vec{t}^A \times \hat{e}_i$$

ضرب طرفین رابطه در $\hat{e}_j$:

$$T^A_{ki}(\hat{e}_j \cdot \hat{e}_k) = \hat{e}_j \cdot (\vec{t}^A \times \hat{e}_i) \;\rightarrow\; T^A_{ki}\delta_{jk} = T^A_{ji} = \vec{t}^A \cdot (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)$$

antisymmetic $\tilde{T}^T = -\tilde{T}$ *or* $(T^A_{ij})^T = T^A_{ji} = -T^A_{ij}$

$$-T^A_{ij} = \vec{t}^A \cdot (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) = \vec{t}^A \cdot (\varepsilon_{ijk}\hat{e}_k) \;\Rightarrow\; T^A_{ij} = -\varepsilon_{ijk}(\vec{t}^A \cdot \hat{e}_k) = -\varepsilon_{ijk}t^A_k$$

$$T^A_{ij} = -\varepsilon_{ij1}t_1 - \varepsilon_{ij2}t_2 - \varepsilon_{ij3}t_3$$

$$\tilde{T}^A = \left[T_{ij}^A\right] = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}^A = t_i\hat{e}_i = t_1\hat{e}_1 + t_2\hat{e}_2 + t_3\hat{e}_3 \Rightarrow \vec{t}^A = \begin{pmatrix} T_{32}^A \\ T_{13}^A \\ T_{21}^A \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} T_{23}^A \\ T_{31}^A \\ T_{12}^A \end{pmatrix}$$

$$t_i^A = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T_{jk}^A \quad , \quad \vec{t}^A = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T_{jk}^A\hat{e}_i$$

$$t_i^A = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T_{jk}^A \quad \& \quad T_{ij}^A = -\varepsilon_{ijk}t_k^A$$

مثال: بردار دوگان بخش پادمتقارن تانسور $\tilde{T}$ را به‌دست آورید.

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حلّ:

$$\tilde{T}^A = \frac{1}{2}\left(\tilde{T} - \tilde{T}^T\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}^A = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T_{jk}^A\hat{e}_i = \begin{pmatrix} T_{32}^A \\ T_{13}^A \\ T_{21}^A \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} T_{23}^A \\ T_{31}^A \\ T_{12}^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$